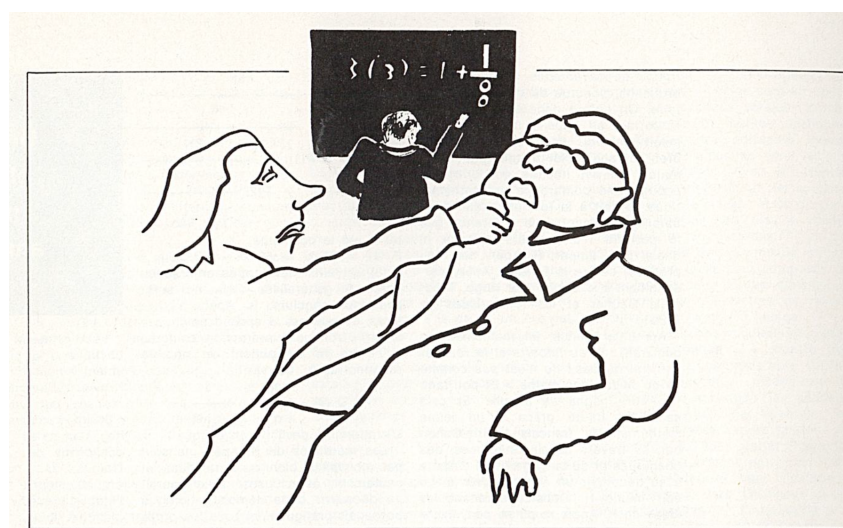


Доказательство, которое могло бы быть найдено Эйлером: иррациональность $\zeta(3)$ по Апери

Неформальное сообщение Альфреда ван дер Поортена*



В 1976 году Р. Апери писал: «Схематически математическая деятельность состоит из двух фаз, которые можно охарактеризовать шуточной формулой: 5 % inspiration (вдохновения) и 95 % transpiration (потения)».⁽¹⁾

Р. Апери способен на ещё большую провокацию. Подобно Виктору Гюго, начавшему «Эрнани» таким далеко не классическим стихом:

*«C'est bien à l'escalier
Dérobé.»*

*«Новый стук.
За дверью потайной
Он ждёт...»*

наш герой начал свой доклад в июне 1978 года с формулы, по меньшей мере необычной. Он написал на доске сумму членов, каждый из которых бесконечен! (Рисунок Michel Mendès France, из Roger Apéry et l'irrationnel, *La Recherche* 97, février 1979, p. 170–172.)

*Перевод с английского Н. Калинина. Перевод части этой статьи содержится в книге Ю. И. Манина и А. А. Панчишкина «Введение в теорию чисел», с. 83–89. В настоящем переводе добавлена обложка (с иллюстрацией Мишеля Мендес-Франса), цитаты из Апери на второй странице, а также примечания переводчика в тексте и после текста ван дер Поортена.

Отрывок из работы Роже Анери «*Mathématique constructive*», опубликованной в сборнике *Penser les mathématiques* (Éditions du Seuil, 1982), p. 58–72:

«... музыка по существу располагается во времени. Мелодия — не множество, а последовательность тонко связанных нот: в отличие от памятников, которые продолжают существовать, мелодия исчезает; чтобы снова появиться, она должна быть воспроизведена; она сохраняется искусственными средствами запоминания — музыкальными партитурами, пластинками. Мы знаем орудия или рисунки наших доисторических предков; мы не знаем их слов или, возможно, их песен.

Точно так же математическое рассуждение, по существу хрупкое, должно быть проделано заново, чтобы быть понятым: математический текст читается с пером в руке. Хотя длительность кажется менее принудительной, чем в музыке, рассмотрение математического рассуждения требует на каждом этапе одновременно охватывать посылки, заключение, использованное правило рассуждения; подлинное понимание обращено ко всей совокупности сочленений рассуждения, так чтобы результат представлялся следствием метода, применимого к другим задачам, а не счастливой случайностью.

Схематически математическая деятельность содержит две фазы. Их характеризует шутка: 5% вдохновения (inspiration), 95% потения (transpiration).

В первой фазе деятельность является умственной, субъективной, независимой от языка, тесно связанной с интуитивной длительностью. Несмотря на две её слабости — мимолётность и несообщаемость, — эта фаза составляет подлинную математическую деятельность.

Во второй фазе математик записывает, формализует, переводит — частично — свою интуицию в сообщаемые термины; каждый может исследовать его результаты, ставшие объективными. Различные исполнения музыкального произведения никогда не бывают строго тождественными; они зависят от личности дирижёра. Точно так же воспроизведение рассуждения содержит неустранимую субъективную часть.

Напоминая, что собака, съедающая гуся, накапливает собачий жир, а не гусиный, А. Пуанкаре иллюстрирует необходимость для каждого включать всякое внешнее знание в собственную личность. Тот, кто обладает математическими текстами, но не понимает их сочленения, не обладает ничем».

1. Journées Arithmétiques de Marseille–Luminy, июнь 1978

На доске с изменениями в программе появилось сообщение, что в четверг в 14:00 с докладом “Об иррациональности $\zeta(3)$ ” выступит Роже Апер из Каена. Несмотря на уже ходившие слухи о том, что у него есть доказательство, общее настроение было скептическим. Доклад лишь усилил это настроение, превратив скепсис в откровенное недоверие. Те, кто слушал вполуха или страдал от недостаточного знания французского, по-видимому, уловили только последовательность неправдоподобных утверждений.

Упражнения.

- ① Для любой последовательности чисел $a_1, a_2, \dots$ выполняется

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}}{(x+a_1)(x+a_2) \cdots (x+a_k)} = \frac{1}{x}.$$

②

$$\zeta(3) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}}. \quad (1)$$

- ③ Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$n^3 u_n + (n-1)^3 u_{n-2} = (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5) u_{n-1}, \quad n \geq 2. \quad (2)$$

Определим последовательности $\{b_n\}$ и $\{a_n\}$ так: $b_0 = 1$, $b_1 = 5$, $a_0 = 0$, $a_1 = 6$, а при $n \geq 2$ — согласно выписанному выше рекуррентному соотношению. Тогда все b_n — целые, а a_n — рациональные числа со знаменателями, делящими $2[1, 2, \dots, n]^3$ ($[1, 2, \dots, n]$ — наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, n$).

- ④ $a_n/b_n \rightarrow \zeta(3)$; сходимость так быстра, что $\zeta(3)$ не может быть рациональным. Существует константа $\theta = 13,41782\dots$ такая, что для всех рациональных p/q при q достаточно большом относительно любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\left| \zeta(3) - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{\theta+\varepsilon}}.$$

Упражнения (продолжение).

②'

$$\zeta(2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \binom{2n}{n}}. \quad (3)$$

③' Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$n^2 u_n - (n-1)^2 u_{n-2} = (11n^2 - 11n + 3)u_{n-1}, \quad n \geq 2, \quad (4)$$

с начальными значениями $b'_0 = 1$, $b'_1 = 3$, $a'_0 = 0$, $a'_1 = 5$. Тогда все b'_n целые, а знаменатели a'_n делят $[1, 2, \dots, n]^2$.

④' Отношения a'_n/b'_n сходятся к $\zeta(2) = \pi^2/6$. Существует постоянная

$$\theta' = 11,85078\dots,$$

такая, что

$$\left| \zeta(2) - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{\theta'+\varepsilon}}$$

для q , достаточно больших по отношению к $\varepsilon > 0$.

После лекции я с некоторым недоверием узнал, что Анри Коэн, тогда из Бордо, а ныне из Гренобля, считает эти утверждения, возможно, верными. Заинтригованный, я присоединился к Хендрику Ленстре из Амстердама и Коэну для вечернего обсуждения, во время которого Коэн объяснил и проверил большую часть деталей доказательства. Мы разошлись убеждёнными, что профессор Апери действительно нашёл чрезвычайно неожиданное и блестящее доказательство иррациональности $\zeta(3)$. Но нам так и не удалось доказать самый важный шаг.

2. Читателю неспециалисту

Вещественное число β называется иррациональным, если оно не имеет вида p_0/q_0 с целыми p_0 и q_0 . Рациональное число β характеризуется следующим свойством: существует целое $q_0 > 0$ такое, что для любых целых p и $q > 0$ при $\beta \neq p/q$

$$\left| \beta - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{qq_0}.$$

Напротив, для иррационального β всегда существует бесконечно много дробей p/q (например, подходящих дробей его цепной дроби), для которых

$$\left| \beta - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

Это даёт простой критерий иррациональности. Если существует $\delta > 0$ и последовательность рациональных чисел $\{p_n/q_n\}$, где $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $p_n/q_n \neq \beta$ и $q_n \rightarrow \infty$, такая, что

$$\left| \beta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^{1+\delta}},$$

то β иррационально.

Удачные приближения позволяют оценить и «меру иррациональности»¹.

Если $\left| \beta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^{1+\delta}}$, и числа q_n монотонно возрастают, причём $q_n < q_{n-1}^{1+\kappa}$ при некотором κ , $0 \leq \kappa < \delta$, и всех достаточно больших n , то для любого $p \in \mathbb{Z}$ и всех достаточно больших $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ имеем $\left| \beta - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{(1+\delta)/(\delta-\kappa)+\varepsilon}}$.

Например, если последовательность $\{q_n\}$ возрастает геометрически, то можно взять сколь угодно малое $\kappa > 0$, так что $1 + 1/\delta$ становится показателем иррациональности для β . Чтобы доказать это утверждение, предположим, что

$$\left| \beta - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^\tau}$$

и выберем n так, что

$$q_{n-1}^{1+\delta} \leq q^\tau < q_n^{1+\delta}.$$

Тогда

$$\frac{1}{qq_n} \leq \left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \left| \beta - \frac{p_n}{q_n} \right| + \left| \beta - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q_n^{1+\delta}} + \frac{1}{q^\tau} < \frac{2}{q^\tau}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}q^\tau \leq qq_n < qq_{n-1}^{1+\kappa} < q^{1+\tau(1+\kappa)/(1+\delta)},$$

или

$$\tau < \frac{1+\delta}{\delta-\kappa} + \varepsilon,$$

как и утверждалось. Этот аргумент эффективен, т. е. вместо слов “достаточно большой” можно написать явные оценки.

Хорошо известно, что по теореме Туэ–Зигеля–Рота для алгебраического числа β , то есть корня многочлена

$$a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_i \in \mathbb{Z},$$

всегда выполняется

$$\left| \beta - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

при q , достаточно большом относительно $\varepsilon > 0$. Поэтому, если β слишком хорошо приближается рациональными числами, то есть $\delta > 1$, то β не является алгебраическим числом, а является трансцендентным. К сожалению, этим способом можно обнаружить лишь множество трансцендентных чисел меры нуль, тогда как, поскольку множество алгебраических чисел счётно, почти все числа трансцендентны.

Заведомо трудно доказать, что какое-либо естественно возникающее число иррационально, не говоря уже о трансцендентности. Иногда везёт: например, обычный

¹Здесь мера иррациональности означает оценку снизу для рациональных приближений числа β : число μ называется допустимой мерой, если для всякого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших q

$$\left| \beta - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{\mu+\varepsilon}} \quad (p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}_{>0}).$$

Инфинум таких μ называется мерой иррациональности β . (Прим. пер.)

ряд для e немедленно показывает, что e иррационально (простое упражнение). В случае дзета-функции Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad (\operatorname{Re} s > 1)$$

имеется довольно хорошо известный факт, что

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

где числа Бернулли B_m рациональны:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \dots$$

Существуют некоторые классические приёмы² для обнаружения иррациональности степеней π , но наиболее удобно сослаться на теорему Эрмита–Линдемана: если $\alpha \neq 0$ алгебраично, то e^α трансцендентно. Отсюда следует, что π трансцендентно, поскольку $e^{\pi i} = -1$, и, тем более, все его положительные степени иррациональны. Поэтому уже давно известно, что $\zeta(2k)$ иррационально при $k = 1, 2, \dots$. С другой стороны, для значений ζ -функции в нечётных целых точках никаких столь же полезных замкнутых формул неизвестно³. Между прочим, формула (5) доказывается довольно легко.

Числа Бернулли определяются производящей функцией

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{1}{2}z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} z^{2m},$$

которая является нетривиальным примером чётной функции. Отсюда следует рекурсия

$$\binom{n+1}{0} B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \dots + \binom{n+1}{n} B_n = 0,$$

где

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

С другой стороны, хорошо известно, что

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

²См., например: I. Niven, *Irrational Numbers*, Carus Monographs, no. 11, MAA–Wiley, 1967.

³Однако имеется знаменитая формула Рамануджана. Пусть α и β — положительные числа такие, что $\alpha\beta = \pi^2$. Тогда, если n — произвольное положительное целое число, то

$$\begin{aligned} & \alpha^{-n} \left\{ \frac{1}{2} \zeta(2n+1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{-2n-1}}{e^{2\alpha k} - 1} \right\} \\ &= (-\beta)^{-n} \left\{ \frac{1}{2} \zeta(2n+1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{-2n-1}}{e^{2\beta k} - 1} \right\} - 2^{2n} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{B_{2n+2-2k}}{(2n+2-2k)!} \alpha^{n+1-k} \beta^k. \end{aligned}$$

Беря α равным рациональному кратному π , мы видим, что $\zeta(2n+1)$ выражается как рациональное кратное π^{2n+1} плюс два очень быстро сходящихся ряда. См., например: Bruce C. Berndt, “Modular transformations and generalizations of several formulae of Ramanujan”, *Rocky Mountain J. of Math.* **7** (1977), 147–189. В самом деле, приведённая выше формула является естественным аналогом формулы Эйлера (5). Указанная статья содержит много других формул и подробные ссылки.

так что

$$\frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} = \pi \cot \pi z = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2z}{n^2 - z^2} \right).$$

Но

$$\pi z \cot \pi z = \pi i z \frac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} = \frac{2\pi i z}{e^{2\pi i z} - 1} + \pi i z = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!} B_{2m} z^{2m},$$

а с другой стороны

$$\pi z \cot \pi z = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} \right) z^{2m}.$$

Сравнивая коэффициенты, получаем формулу (5). Проявив некоторую изобретательность, можно обойтись⁴ без прямого обращения к бесконечному произведению для $\sin \pi z$ или к разложению для $\pi \cot \pi z$.

В самом деле, доказательство иррациональности чисел

$$\zeta(2n+1), \quad n = 1, 2, \dots,$$

составляет одну из выдающихся проблем этой теории; по своей значимости она стоит в одном ряду с вопросами об арифметической природе

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right)$$

и чисел $e\pi, e + \pi, \dots$, которые до сих пор остаются невыясненными. Достижение Аперри отчасти измеряется тем, что эти вопросы в течение последних нескольких столетий рассматривались математиками самого высокого ранга, но без скольконибудь существенного успеха.⁵

3. Некоторые несущественные пояснения

Следующим объяснениям я обязан Анри Коэну. Всё это, конечно, следует рассказу Аперри. Тождество

$$\sum_{k=1}^K \frac{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}}{(x + a_1) \cdots (x + a_k)} = \frac{1}{x} - \frac{a_1 a_2 \cdots a_K}{x(x + a_1) \cdots (x + a_K)}$$

легко получается, если записать правую часть как $A_0 - A_K$ и заметить, что каждый член слева равен $A_{k-1} - A_k$. Это объясняет ①. Теперь положим

$$x = n^2, \quad a_k = -k^2,$$

⁴Подробный список литературы и несколько новых доказательств содержатся в статье: Bruce C. Berndt, “Elementary evaluation of $\zeta(2n)$ ”, *Math. Mag.* **48** (1975), 148–153.

⁵С тех пор были получены важные частичные результаты. Балл и Ривоаль доказали, что среди нечётных значений $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots$ бесконечно много иррациональных, K. Ball and T. Rivoal, *Irrationalité d’une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, *Invent. Math.* **146** (2001), 193–207; T. Rivoal, *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331** (2000), 267–270. Зудилин доказал, что по крайней мере одно из чисел $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ иррационально, W. Zudilin, *One of the numbers $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ is irrational*, *Russian Math. Surveys* **56:4** (2001), 774–776. В близком направлении недавняя работа Калегари, Димитрова и Тан установила $\mathbb{Q}$ -линейную независимость 1, $\zeta(2)$ и $L(2, \chi_{-3}) = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \dots$, в частности иррациональность $L(2, \chi_{-3})$, F. Calegari, V. Dimitrov and Y. Tang, *The linear independence of 1, $\zeta(2)$, and $L(2, \chi_{-3})$* , arXiv:2408.15403. (Прим. пер.)

и возьмём $K = n - 1$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!^2}{(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)} &= \frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!^2}{n^2(n^2-1^2)\cdots(n^2-(n-1)^2)} \\ &= \frac{1}{n^2} - \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2 \binom{2n}{n}}. \end{aligned}$$

Записывая⁶

$$\varepsilon_{n,k} = \frac{1}{2} \frac{k!^2(n-k)!}{k^3(n+k)!},$$

и пользуясь тем, что

$$(-1)^k n(\varepsilon_{n,k} - \varepsilon_{n-1,k}) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!^2}{(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)},$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (\varepsilon_{n,k} - \varepsilon_{n-1,k}) &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^3} - 2 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}} \\ &= \sum_{k=1}^N (-1)^k (\varepsilon_{N,k} - \varepsilon_{k,k}) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{2k^3(N+k) \binom{N+k}{k} \binom{N}{k}} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k-1}}{k^3 \binom{2k}{k}}. \end{aligned}$$

Замечая, что при $N \rightarrow \infty$ первый член в правой части стремится к нулю, получаем ②.⁷

⁶В качестве примера применения алгоритма Госпера рассмотрим сумму

$$F(n, k) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!^2}{n(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)} = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!^2(n-k-1)!}{(n+k)!},$$

В системе Махима (пакет **zeilberger**) достаточно выполнить

```
load("zeilberger")$
F : (-1)^(k-1) * factorial(k-1)^2
    * factorial(n-k-1) / factorial(n+k)$
Gosper(F,n);
```

На выходе Махима получаем сертификат $R(n, k) = -\frac{n+k}{2k}$. Это означает, что

$$F(n, k) = R(n+1, k)F(n+1, k) - R(n, k)F(n, k),$$

где

$$F(n, k) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!^2(n-k-1)!}{(n+k)!}.$$

При этом

$$R(n, k)F(n, k) = (-1)^k \varepsilon_{n-1,k},$$

откуда получаем

$$\varepsilon_{n,k} = \frac{1}{2} \frac{k!^2(n-k)!}{k^3(n+k)!}.$$

$$(-1)^k n(\varepsilon_{n,k} - \varepsilon_{n-1,k}) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!^2}{(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)}.$$

Подробнее про созидательное телескопирование после основного текста. (Прим. пер.)

⁷На самом деле формула ② довольно хорошо известна: несколько лет назад её заметил Raymond Ayoub из Penn

4. Некоторые почти существенные пояснения

Всё это совершенно несущественно для доказательства. Достаточно было бы ввести величины ($k \leq n$)

$$c_{n,k} = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 \binom{n}{m} \binom{n+m}{m}}, \quad (6)$$

и заметить, что, очевидно,

$$c_{n,k} \longrightarrow \zeta(3) \quad (n \rightarrow \infty),$$

равномерно по k . Можно было бы надеяться, что уже последовательность $c_{n,k}$ влечёт иррациональность $\zeta(3)$, например диагональная последовательность при $k = n$. Однако это не совсем так. Чтобы это увидеть, полезно доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Имеем*

$$2c_{n,k} \binom{n+k}{k} \in \mathbb{Z} + \frac{\mathbb{Z}}{2^3} + \cdots + \frac{\mathbb{Z}}{n^3} = \frac{\mathbb{Z}}{[1, 2, \dots, n]^3}.$$

Иными словами,

$$2[1, 2, \dots, n]^3 c_{n,k} \binom{n+k}{k}$$

является целым числом.

Доказательство. Проверим, сколько раз данный простой делитель p входит в знаменатель. Но

$$\binom{n+k}{k} \binom{n+m}{m} = \binom{n+k}{k-m} \binom{k}{m},$$

и поэтому, поскольку

$$\text{ord}_p \binom{n}{m} \leq \left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor - \text{ord}_p m = \text{ord}_p [1, \dots, n] - \text{ord}_p m,$$

State, и она уже появлялась в печати: Margrethe Munthe Hjortnaes, *Overføring av rekken $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^3)$ til et bestemt integral*, Proc. 12th Cong. Scand. Maths, Lund 10–15 Aug. 1953 (Lund, 1954). Независимо от этого её снова заметил R. William Gosper, Jr. из Пало-Альто; см. статью Gosper'a *A calculus of series rearrangements*, в сборнике *Algorithms and Complexity, New Directions and Recent Results*, ed. J. Traub, Academic Press, 1976, pp. 121–151, где изложены соответствующие методы.

Анри Коэн заметил, что эта формула имеет вид

$$\zeta(3) = \frac{5}{4} \text{Li}_3 \omega^{-2} + \frac{2\pi^2}{15} \log \omega - \frac{2}{3} \log^3 \omega,$$

где

$$\omega = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad \text{Li}_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$$

— трилогарифм. Hjortnaes и Ayoub, а соответственно и Gosper, отмечают следующие интегральные представления, которые эквивалентны формулам выше:

$$\zeta(3) = 10 \int_0^{\log \omega} t^2 \coth t \, dt,$$

$$\zeta(3) = 10 \int_0^{1/2} \frac{(\text{arcsinh } t)^2}{t} \, dt.$$

В случае $\zeta(2)$ формула ещё более известна. Например, на неё ссылается Z. R. Melzak в книге *Introduction to Concrete Mathematics*, Wiley, 1973, p. 85, хотя предложенное там доказательство не вполне подходит. Формулу (2') можно доказать, слегка изменив рассуждение раздела 3: надо умножить на $(-1)^{n-1}$ вместо деления на n (Также поможет тождество $n(\varepsilon_{n,k} - \varepsilon_{n-1,k}) = -k(\varepsilon_{n,k} + \varepsilon_{n-1,k})$. Прим. пер.). Многие формулы, похожие на (2) и (2'), встречаются в литературе и в математическом фольклоре.

получаем

$$\begin{aligned} \text{ord}_p \left(m^3 \binom{n}{m} \binom{n+m}{m} / \binom{n+k}{k} \right) &= \text{ord}_p \left(m^3 \binom{n}{m} \binom{k}{m} / \binom{n+k}{k-m} \right) \\ &\leq 3 \text{ord}_p m + \left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\log k}{\log p} \right\rfloor - 2 \text{ord}_p m, \end{aligned}$$

что даёт утверждение, поскольку $m \leq k \leq n$. $\square$

Заметим, что те, кому это хорошо известно,⁸ знают, что при n , достаточно большом относительно $\varepsilon > 0$,

$$[1, 2, \dots, n] \leq e^{n(1+\varepsilon)}.$$

Грубо говоря,

$$[1, 2, \dots, n] = \prod_{p \leq n} p^{\lfloor \log n / \log p \rfloor} \leq \prod_{p \leq n} n \simeq n^{n/\log n} = e^n.$$

Оказывается, что у $c_{n,k}$ знаменатели слишком велики по сравнению с их близостью к $\zeta(3)$. Поэтому, чтобы применить критерий иррациональности, нужно каким-то образом ускорить сходимость. Апери описал этот процесс следующим образом.

Рассмотрим два треугольных массива, определённых при $k \leq n$, с элементами соответственно

$$d_{n,k}^{(0)} = c_{n,k} \binom{n+k}{k} \quad \text{и} \quad \binom{n+k}{k}.$$

Напомним, что эти массивы обладают тем свойством, что их “частное” стремится к $\zeta(3)$: это означает, что для любой “диагонали” $\{n, k(n)\}$ частное соответствующих элементов двух массивов стремится к $\zeta(3)$. Теперь применим⁹ к каждому массиву следующие преобразования:

$$\begin{aligned} d_{n,k}^{(0)} &\mapsto d_{n,n-k}^{(0)} = d_{n,k}^{(1)}, & d_{n,k}^{(1)} &\mapsto \binom{n}{k} d_{n,k}^{(1)} = d_{n,k}^{(2)}, \\ d_{n,k}^{(2)} &\mapsto \sum_{k'=0}^k \binom{k}{k'} d_{n,k'}^{(2)} = d_{n,k}^{(3)}, & d_{n,k}^{(3)} &\mapsto \binom{n}{k} d_{n,k}^{(3)} = d_{n,k}^{(4)}, \\ d_{n,k}^{(4)} &\mapsto \sum_{k'=0}^k \binom{k}{k'} d_{n,k'}^{(4)} = d_{n,k}^{(5)}. \end{aligned}$$

Для второго массива это даёт соответственно

$$\begin{aligned} \binom{n+k}{k} &\mapsto \binom{2n-k}{n} \\ &\mapsto \binom{n}{k} \binom{2n-k}{n} \\ &\mapsto \sum_{k_1=0}^k \binom{k}{k_1} \binom{n}{k_1} \binom{2n-k_1}{n} \end{aligned}$$

⁸Те, кому это известно очень хорошо, пишут $\log[1, \dots, n] = \sum_{m=1}^{\infty} \theta(n^{1/m}) = \psi(n)$, где $\theta(n) = \sum_{p \leq n} \log p$. Известно, что $\frac{\psi(n)}{n} < 1.03883 \dots$ с максимумом при $n = 113$, и даже $\psi(n) - n < (0.024334 \dots) \frac{n}{\log n}$ ($n > 525752$). См.: J. Barkley Rosser and Lowell Schoenfeld, *Math. Comp.* **29** (1975), 243–269.

⁹Почему преобразования именно такие? Есть множество методов ускорения сходимости, имеются объяснения метода Апери в <https://arxiv.org/pdf/2401.17720> и в главе 4 <https://arxiv.org/pdf/2607.06581>. В приложении мы увидим, почему появление биномиальных коэффициентов естественно (Прим. пер.).

$$\begin{aligned}
&\mapsto \sum_{k_1=0}^k \binom{k}{k_1} \binom{n}{k_1} \binom{n}{k} \binom{2n-k_1}{n} \\
&\mapsto \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} \binom{k}{k_2} \binom{k_2}{k_1} \binom{n}{k_1} \binom{n}{k_2} \binom{2n-k_1}{n}.
\end{aligned}$$

Конечно, эти массивы сохранили свойство, что их “частное” стремится к $\zeta(3)$, и по-прежнему выполнено

$$2[1, \dots, n]^3 d_{n,k} \in \mathbb{Z}.$$

Теперь возьмём главные диагонали этих массивов, то есть $k = n$, обозначим их соответственно через $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, и сделаем поразительные утверждения, заключённые в ③: каждая из этих двух последовательностей удовлетворяет рекуррентному соотношению (2)! Это выглядит явно абсурдным, поскольку, казалось бы, среди прочего решение $\{u_n\}$ уравнения (2) с целыми начальными значениями u_0, u_1 должно иметь знаменатель скорее порядка $n!^3$, чем порядка 1 или даже $2[1, \dots, n]^3$. В Марселе наше изумление было полным, когда наш НР-67, вычисляя $\{b_n\}$, с одной стороны, по приведённому выше определению, а с другой стороны, по рекуррентному соотношению (2), неизменно выдавал одни и те же значения!

5. Похоже, что Апери доказал иррациональность $\zeta(3)$

Мы никак не могли доказать, что определённые выше последовательности $\{a_n\}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (2). Сам Апери едко прокомментировал в Хельсинки, что считает это скорее комплиментом, чем критикой его метода. Но эмпирически, то есть численно, свидетельства в пользу этого были совершенно убедительными. Казалось, что иррациональность $\zeta(3)$ действительно доказана, поскольку остальная часть доказательства, то есть ④, получается довольно легко.

Положим

$$P(n-1) = 34n^3 - 51n^2 + 27n - 5.$$

Имеем

$$n^3 a_n - P(n-1) a_{n-1} + (n-1)^3 a_{n-2} = 0,$$

$$n^3 b_n - P(n-1) b_{n-1} + (n-1)^3 b_{n-2} = 0.$$

Умножая первое уравнение на b_{n-1} , а второе на a_{n-1} , получаем

$$n^3 (a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n) = (n-1)^3 (a_{n-1} b_{n-2} - a_{n-2} b_{n-1}).$$

Вспоминая, что

$$a_1 b_0 - a_0 b_1 = 6 \cdot 1 - 0 \cdot 5 = 6,$$

из этого изящно следует

$$a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n = \frac{6}{n^3}. \tag{7}$$

Поскольку

$$\zeta(3) - \frac{a_0}{b_0} = \zeta(3),$$

легко получить по индукции¹⁰ что

$$\left| \zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{6}{k^3 b_k b_{k-1}}.$$

Следовательно,

$$\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} = O(b_n^{-2}).$$

С другой стороны, рекуррентное соотношение позволяет легко оценить b_n , по крайней мере асимптотически. Мы имеем

$$b_n - \left(34 - \frac{51}{n} + \frac{27}{n^2} - \frac{5}{n^3} \right) b_{n-1} + \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3} \right) b_{n-2} = 0.$$

Так как многочлен

$$x^2 - 34x + 1$$

имеет корни

$$17 \pm 12\sqrt{2} = (1 \pm \sqrt{2})^4,$$

мы сразу заключаем, что

$$b_n = O(\alpha^n), \quad \alpha = (1 + \sqrt{2})^4.$$

Кстати, Коэн мог вычислить точнее:

$$b_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{(2\pi\sqrt{2})^{3/2}} \frac{(1 + \sqrt{2})^{4n}}{n^{3/2}} \left(1 - \frac{48 - 15\sqrt{2}}{64n} + O(n^{-2}) \right). \quad (8)$$

Нужно помнить, что числа a_n не являются целыми. Но, записывая

$$p_n = 2[1, 2, \dots, n]^3 a_n, \quad q_n = 2[1, 2, \dots, n]^3 b_n,$$

получаем

$$p_n, q_n \in \mathbb{Z}$$

и

$$q_n = O(\alpha^n e^{3n}), \quad \zeta(3) - \frac{p_n}{q_n} = O(\alpha^{-2n}) = O(q_n^{-(1+\delta)}),$$

где

$$\delta = \frac{\log \alpha - 3}{\log \alpha + 3} = 0.080529 \dots > 0.$$

Следовательно, по критерию иррациональности число $\zeta(3)$ действительно иррационально. Более того, поскольку

$$\delta^{-1} = 12.41720 \dots,$$

получаем:

Для всех целых $p, q > 0$, достаточно больших относительно $\varepsilon > 0$, выполнено $\left \zeta(3) - \frac{p}{q} \right > q^{-(\theta+\varepsilon)}, \quad \theta = 13.417820 \dots$
--

¹⁰Положим $\zeta(3) - a_n/b_n = x_n$, тогда

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{6}{n^3 b_n b_{n-1}}, \quad x_\infty = 0.$$

6. Оставшиеся тривиальные проверки

Чтобы убедиться в правильности доказательства Апери, нам остаётся лишь выполнить следующее упражнение.

Упражнение. Докажите следующие тождества.

⑤ Пусть

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2, \quad a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 c_{n,k},$$

где

$$c_{n,k} = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 \binom{n}{m} \binom{n+m}{m}}.$$

Тогда

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 6, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = 5,$$

и каждая из последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (2).

В том же духе для случая $\zeta(2)$ требуется следующее.

⑤' Пусть

$$b'_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}, \quad a'_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k} c'_{n,k},$$

где

$$c'_{n,k} = 2 \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m-1}}{m^2} + \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^{n+m-1}}{m^2 \binom{n}{m} \binom{n+m}{m}}.$$

Тогда

$$a'_0 = 0, \quad a'_1 = 5, \quad b'_0 = 1, \quad b'_1 = 3,$$

и каждая из последовательностей $\{a'_n\}$ и $\{b'_n\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (4).

Полезно заметить, что для доказательства Апери требуется лишь немногим больше, чем доказательство этих утверждений. В самом деле, совершенно ясно, что

$$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \zeta(3);$$

числа b_n являются целыми, а лемма раздела 4 показывает, что числа a_n являются “почти целыми”. В разделе 5 мы показали, что если эти последовательности удовлетворяют рекуррентному соотношению (2), то иррациональность $\zeta(3)$ доказана, так как из неравенства

$$\log \alpha > 3, \quad \alpha = (1 + \sqrt{2})^4,$$

получаем $\delta > 0$. Следовательно, как уже отмечалось в разных попутных замечаниях, большая часть предыдущих рассуждений вообще не нужна. Более того, я обязан Джону Конвею замечанием, что даже ⑤ несущественно.

Упражнение. Будьте первым на районе, кто докажет двумя строками, что $\zeta(3)$ иррационально.¹¹

⑥ Исходя из определений в ⑤, покажите, что

$$a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n = 6n^{-3}$$

и что

$$b_n = O(\alpha^n), \quad \alpha = (1 + \sqrt{2})^4.$$

Выведите отсюда, что $\zeta(3)$ иррационально, поскольку

$$\log \alpha > 3.$$

Упражнение. Поразите своих друзей отличной мерой иррациональности для π^2 .

⑥' Исходя из определений в ⑤', покажите, что

$$a'_n b'_{n-1} - a'_{n-1} b'_n = 5(-1)^{n-1} n^{-2}$$

и что

$$b'_n = O(\alpha^n), \quad \alpha = \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \right)^5.$$

Выведите отсюда, что

$$\left| \pi^2 - \frac{p}{q} \right| > q^{-(\theta+\varepsilon)},$$

где

$$\theta = 11.850782 \dots,$$

для всех целых $p, q > Q(\varepsilon)$.¹²

¹¹Автор, однако, не утверждает, что сам способен это сделать. Заметим, что на самом деле требуется даже меньше: достаточно показать, что

$$a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n = O(\gamma^n), \quad b_n = O(\beta^n),$$

причём

$$\log \beta - \log \gamma > 3.$$

¹²Хотя иррациональность $\zeta(2)$ давно известна, результат Апері в этом случае существенен. Получаемая мера иррациональности для π^2 является лучшей из известных; соответствующая мера иррациональности для π равна 23.70164... Эти результаты весьма выгодно сравниваются с результатами Малера: $\left| \pi - \frac{p}{q} \right| > q^{-42}$. См.: K. Mahler, *On the approximation of π* , Proc. K. Ned. Akad. Wet. Amsterdam A **56** (= Indag. Math. **15**) (1953), 29–42. Указание на оценку $\left| \pi - \frac{p}{q} \right| > q^{-30}$ см. также в статье: K. Mahler, *Applications of some formulae by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms*, Math. Annalen **168** (1967), 200–227. Вирзинг объявил оценку

$$\left| \pi - \frac{p}{q} \right| > q^{-21},$$

а Миньотт доказал, что при достаточно больших q $\left| \pi - \frac{p}{q} \right| > q^{-20}$; это лучший известный результат. Следует отметить, что приведённые результаты опираются на глубокие методы и сложные оценки теории трансцендентных чисел, в отличие от существенно элементарных методов доказательства Апері. Миньотт в той же работе также показывает, что $\left| \pi^2 - \frac{p}{q} \right| > q^{-18}$, что слабее результата Апері.

7. ICM '78, Хельсинки, август 1978

За прошедшие два месяца ни Коэн, ни я так и не смогли доказать (5) или (5'). После нескольких дней безуспешных попыток эта конкретная задача была упомянута Дону Загиру из Бонна, и он раздражающе быстро показал, что последовательность $\{b'_n\}$ действительно удовлетворяет рекуррентному соотношению (4). Это более или менее прорвало плотину, и вскоре (5) и (5') были побеждены. Анри Коэн выступил в пятницу 18 августа в 17:00 перед весьма многочисленной аудиторией на языке большинства, доказав (5) и объяснив, как отсюда следует иррациональность $\zeta(3)$. Затем Апери сделал несколько замечаний о статусе французского языка и намекнул на внутреннюю мотивацию своего поразительного доказательства, о которой говорилось в разделе 3.

Упражнение.

Ложный след?

(7) Покажите, что

$$\zeta(3) = \frac{6}{5 - \frac{1}{117 - \frac{64}{535 - \frac{729}{1436 - \frac{4096}{3105 - \dots}}}}},$$

(числители равны n^6 , а знаменатели $34n^3 + 51n^2 + 27n + 5$) и выведите отсюда, что $\zeta(3) = 1.202056903\dots$ иррационально.

(7') Покажите, что

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = \frac{5}{3 + \frac{1}{25 + \frac{16}{69 + \frac{81}{135 + \frac{256}{223 + \dots}}}}},$$

(числители равны n^4 , знаменатели $11n^2 + 11n + 3$) и выведите отсюда, что π^2 имеет меру иррациональности не больше $11.850782\dots$.

8. Некоторые довольно сложные, но остроумные пояснения

Согласно изречению Литлвуда, всякое тождество становится тривиальным, будучи проверено. Очевидно, (5) очень близко к контрпримеру. Следующее в основном принадлежит Загиру и Коэну. Кстати, сначала мы рассматривали (5'), которое казалось проще, но это было потому, что мы не заметили тождества

$$\sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k \binom{n}{k}^2 \binom{n}{\ell} \binom{k}{\ell} \binom{2n-\ell}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{2n-k}{n}^2.$$

Теперь замена k на $n - k$ связывает массивы из раздела 4 с (5).

Удобно писать

$$b_{n,k} = \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2, \quad a_{n,k} = b_{n,k} c_{n,k},$$

так что

$$b_n = \sum_{k=0}^n b_{n,k}, \quad a_n = \sum_{k=0}^n b_{n,k} c_{n,k}.$$

Тогда мы хотим показать, что

$$\sum_k \{ (n+1)^3 b_{n+1,k} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5) b_{n,k} + n^3 b_{n-1,k} \} = 0.$$

Остроумно построим¹³

$$B_{n,k} = 4(2n+1)(k(2k+1) - (2n+1)^2) \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2,$$

с тем расчётом, что

$$\begin{aligned} B_{n,k} - B_{n,k-1} &= (n+1)^3 \binom{n+1}{k}^2 \binom{n+1+k}{k}^2 \\ &- (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5) \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 + n^3 \binom{n-1}{k}^2 \binom{n-1+k}{k}^2. \end{aligned}$$

И, *o mirabile dictu*¹⁴, последовательность $\{b_n\}$ действительно удовлетворяет рекуррентному соотношению (2) благодаря методу созидательного телескопирования (creative telescoping), при обычных соглашениях

$$B_{n,k} = 0 \quad \text{при } k < 0 \text{ или } k > n.$$

Заметим также, что из

$$P(n) = 34n^3 + 51n^2 + 27n + 5$$

¹³Положим $b_n = \sum_k F(n, k)$, $F(n, k) = \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$. В системе Махима выполним

```
load("zeilberger")$
F : factorial(n+k)^2/ (factorial(k)^4*factorial(n-k)^2)$
Zeilberger(F,k,n);
```

Вывод состоит из двух частей. Первая — это рациональный сертификат $R(n, k)$, а вторая — список коэффициентов телескопирующего оператора:

$$[-(n+1)^3, (2n+3)(17n^2 + 51n + 39), -(n+2)^3].$$

Это означает, что выполнено тождество

$$-(n+1)^3 F(n, k) + (2n+3)(17n^2 + 51n + 39) F(n+1, k) - (n+2)^3 F(n+2, k) = G(n, k+1) - G(n, k),$$

где

$$G(n, k) = R(n, k) F(n, k).$$

После замены $n \mapsto n-1$ (и умножения на -1) и суммирования по k оно принимает стандартный вид

$$(n+1)^3 b_{n+1} - (2n+1)(17n^2 + 17n + 5) b_n + n^3 b_{n-1} = 0.$$

Впрочем, алгоритм, реализованный в Махима, возник именно вследствие доказательства Аперри. (Прим. пер.)

¹⁴... чудесатее и чудесатее (Прим. пер.)

следует

$$P(n-1) = -P(-n).$$

Остальное уже не представляет трудностей. Заметим, что

$$\begin{aligned} & (n+1)^3 b_{n+1,k} c_{n+1,k} - P(n) b_{n,k} c_{n,k} + n^3 b_{n-1,k} c_{n-1,k} \\ &= (B_{n,k} - B_{n,k-1}) c_{n,k} + (n+1)^3 b_{n+1,k} (c_{n+1,k} - c_{n,k}) - n^3 b_{n-1,k} (c_{n,k} - c_{n-1,k}). \end{aligned} \quad (9)$$

Ясно, что при $0 \leq k < n$

$$\begin{aligned} c_{n,k} - c_{n-1,k} &= \frac{1}{n^3} + \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^m (m-1)!^2 (n-m-1)!}{(n+m)!} \\ &= \frac{1}{n^3} + \sum_{m=1}^k \left(\frac{(-1)^m m!^2 (n-m-1)!}{n^2 (n+m)!} - \frac{(-1)^{m-1} (m-1)!^2 (n-m)!}{n^2 (n+m-1)!} \right) \\ &= \frac{(-1)^k k!^2 (n-k-1)!}{n^2 (n+k)!}, \end{aligned}$$

тогда как даже малого чуда не требуется, чтобы выписать

$$c_{n,k} - c_{n,k-1}.$$

После некоторой массивной реорганизации выражение (9) превращается в

$$A_{n,k} - A_{n,k-1},$$

где

$$A_{n,k} = B_{n,k} c_{n,k} + \frac{5(2n+1)(-1)^{k-1}k}{n(n+1)} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}.$$

Тем самым мы доказали (5), а попутно и (3). Это, конечно, подтверждает утверждение Апери о том, что он доказал иррациональность $\zeta(3)$.

9. Случай $\zeta(2)$

Рассуждения, необходимые для упражнений (5'), весьма похожи на уже описанные. Однако, возможно, будет любезно по отношению к читателю сообщить, что разумно взять

$$\begin{aligned} B'_{n,k} &= (k^2 + 3(2n+1)k - 11n^2 - 9n - 2) \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}, \\ A'_{n,k} &= B'_{n,k} c'_{n,k} + 3(-1)^{n+k-1} \frac{(n-1)!}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$c'_{n,k} - c'_{n-1,k} = 2(-1)^{n+k-1} \frac{k!^2 (n-k-1)!}{n(n+k)!},$$

и

$$b'_n = \frac{\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^4}{2\pi\sqrt{5+2\sqrt{5}}} \frac{\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^{5n}}{n} (1 + O(n^{-1})). \quad (10)$$

Заметим также, что если

$$Q(n) = 11n^2 + 11n + 3,$$

то

$$Q(n-1) = Q(-n).$$

10. Что вообще здесь происходит?

Невероятное доказательство Апери кажется смесью откровений и знамений¹⁵. Главный вопрос состоит в том, как всё это обобщить: вниз, к постоянной Эйлера γ , и вверх, к другим значениям $\zeta(t)$? По-видимому, перед нами лишь верхушка айсберга, связывающего $(1 + \sqrt{2})^4$ с $\zeta(3)$ и $(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}))^5$ с $\zeta(2)$. У нас есть удивительные тождества (2) и (2'), а также поразительные цепные дроби, полученные Коэном для его доклада в Хельсинки, (7) и (7'). Так ли выглядит весь айсберг?

Со своей стороны я склоняюсь к мнению, что многое из представленного выше скорее мистифицирует и запутывает, чем объясняет происходящее. Например, Ричард Аски из Мадисона, Висконсин, указал мне, что последовательности $\{b_n\}$ и $\{b'_n\}$ можно распознать как специальные значения некоторых гипергеометрических многочленов; тогда рекуррентные соотношения (2) и (4) немедленно становятся тождествами, связывающими гипергеометрические функции, и значительная часть магии развеивается. К сожалению, трудности остаются, поскольку о высших обобщениях классических гипергеометрических функций известно не так уж много. По этой и другим причинам, вероятно, следует думать о рекуррентных соотношениях порядка выше второго. Между прочим, это означает, что цепные дроби являются ложным следом. Во всяком случае, (7) заслоняет фундаментальное чудо. Его подходящие дроби P_n/Q_n , конечно, таковы, что обе последовательности $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$ удовлетворяют соотношению

$$U_{n+1} = (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)U_n - n^6U_{n-1}.$$

Доказательство работает не потому, что цепная дробь не обрывается: это срабатывает только для правильных цепных дробей. Оно работает потому, что при

$$U_0 = 1, \quad U_1 = 5$$

случается так, что $(n!)^3$ делит целые числа U_n . Точнее говоря, уже достаточно, и это необходимо, чтобы при любых целых начальных значениях U_0, U_1 число

$$(n!)^3$$

всегда делило

$$2[1, \dots, n]^3 U_n.$$

Аналогичное чудо делает рекуррентное соотношение

$$U_{n+1} = (11n^2 + 11n + 3)U_n + n^4U_{n-1}$$

полезным для доказательства иррациональности $\zeta(2)$.¹⁶ Эти неожиданности обобщают следующий хорошо известный факт, на который моё внимание обратил Фриц

¹⁵ *Mysteries and miracles* в оригинале (Прим. пер.).

¹⁶ Том Кьюсик из Буффало заметил, что следующие рекуррентные соотношения также дают цепные дроби, сходящиеся к $\pi^2/6$:

$$n^2u_n = (7n^2 - 7n + 2)u_{n-1} + 8(n-1)^2u_{n-2}$$

одним решением которых является $\sum \binom{n}{k}^3$, и

$$n^3u_n = 2(2n-1)(3n^2-3n+1)u_{n-1} + (4n-3)(4n-4)(4n-5)u_{n-2},$$

одним решением которого является $\sum \binom{n}{k}^4$. На первый взгляд первое из них даёт для π^2 худшую меру иррациональности, чем полученная Апери, а второе вообще не даёт иррациональности. Результаты Апери действительно замечательны.

Бёйкерс из Лейдена: рекуррентное соотношение

$$U_{n+1} = (6n + 3)U_n - n^2U_{n-1}$$

таково, что $n!$ делит U_n , если

$$U_0 = 1, \quad U_1 = 3,$$

и $n!$ делит $[1, \dots, n]U_n$ при любых целых начальных значениях U_0, U_1 .

Упражнение.

Каковы высшие аналоги?

⑧ Покажите, что если

$$B(z) = (1 - 6z + z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

то

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+k}{k},$$

и все b_n являются целыми. Когда вы найдёте выражение для a_n из

$$A(z) = (1 - 6z + z^2)^{-1/2} \int_0^z (1 - 6t + t^2)^{-1/2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

тогда заметите, что все числа $[1, \dots, n]a_n$ являются целыми. Покажите, что последовательности $\{a_n\}$, где

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1,$$

и $\{b_n\}$, где

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 3,$$

обе удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$nu_n + (n-1)u_{n-2} = (6n-3)u_{n-1}.$$

Теперь докажите, что существует константа λ такая, что

$$A(z) - \lambda B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

не имеет особенностей в точке

$$3 - 2\sqrt{2}.$$

Выведите отсюда, что

$$c_n = O(\alpha^{-n}), \quad \alpha = (1 + \sqrt{2})^2,$$

и заключите, что $\log 2$ имеет меру иррациональности не больше

$$4.662100831 \dots$$

Конечно, упражнение ⑥ должно напомнить нам, что рекуррентные соотношения могут быть совершенно несущественны для доказательства. Тогда главное состоит в подходящем определении $c_{n,k}$, и мы снова возвращаемся к поиску обобщений ②. Но пока обобщение работы Апери остаётся, как говорится, тайной, под покровом загадки.¹⁷

Самым поразительным, однако, следует считать то обстоятельство, что доказательство Апери не содержит ничего такого, что не могло бы быть доступно математику двухсотлетней давности. Доказательство, которое мы увидели, могло быть найдено многими математиками, но было ими упущено.

Эта заметка была написана в Queen's University, Kingston, Ontario, во время научного отпуска автора из University of New South Wales, Sydney, Australia.

Октябрь 1978

Postscript. См. L. Lewin, *Dilogarithms and associated functions*, Macdonald, London, 1958, где содержится множество восхитительных фактов, включая формулу с трилогарифмом из сноски 4, приведённую на стр. 139. На стр. 89 книги Louis Comtet, *Advanced Combinatorics*, D. Reidel, Dordrecht, 1974, с удивлением обнаруживаешь упражнение, предлагающее доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{3} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\binom{2n}{n}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\binom{2n}{n}} = \frac{\pi^2}{18}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4\binom{2n}{n}} = \frac{17\pi^4}{3240}.$$

Воспользовавшись тождеством

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2\binom{2n}{n}} = 2 \left(\sin^{-1} \frac{x}{2} \right)^2$$

(см., например, Melzak, *op. cit.*, p. 108), первые три формулы и формула с трилогарифмом становятся вполне доступными для доказательства. Однако я не встречал никого, кто мог бы доказать выражение для $\zeta(4)$, пока сам не доказал его в марте 1979 года, заметив замечание Левина, что также

$$2 \int_0^{\pi/3} x \left(\log \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \right)^2 dx = \frac{17\pi^4}{3240}.$$

¹⁷Ну, не совсем. Просто совершенно не ясно, куда двигаться. Вычисления, предложенные Коэном, показывают, что

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} = \frac{36}{17} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4\binom{2n}{n}},$$

так что для всех практических целей это верно; кроме того, Госпер показал, что

$$\zeta(5) = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{4}{5n^2} \right) \frac{(-1)^n}{n^3\binom{2n}{n}}.$$

Дэвид Хокинс из Боулдера предлагает похожие формулы. По-видимому, такие выражения можно порождать почти по желанию, используя подходящие тождества ускорения рядов.

Сэм Вэгстафф из Иллинойса и Эндрю Одлыжко из Bell Labs сообщили мне, что численные данные позволяют предположить: формулы вида (2) или (2') для $\zeta(t)$ существуют только при $t = 2, 3, 4$. Это подтверждается моими исследованиями в готовящейся рукописи *Some wonderful formulae....* Рекуррентные соотношения¹⁸ тоже давно известны. Фриц Бёйкерс из Лейдена в статье¹⁹ *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$* (*Bulletin of the London Mathematical Society*, 11(3), 268-272, (1979)) нашёл элегантный подход к доказательствам Апери, полностью обходящий явные тождества, рекуррентные соотношения и прочую магию. Вместо этого достаточно рассмотреть

$$I = -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(x)P_n(y) \log xy}{1-xy} dx dy = b_n \zeta(3) - a_n,$$

заметив, что b_n являются целыми, а a_n рациональны, причём

$$2[1, \dots, n]^3 a_n$$

целое, тогда как

$$|I| \leq \zeta(3)(1 - \sqrt{2})^{4n}.$$

Здесь

$$P_n(z) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^n(1-z)^n)$$

есть многочлен Лежандра. И снова нет очевидного способа обобщить доказательство.

Оглядываясь назад, становится ясно, что упражнение (8) действительно полезно; его следствия изучаются Бомбьери и др. в Принстоне. Например, интуиция ошибается, когда мы с недоверием воспринимаем факты (3). Всё, что они говорят, состоит в том, что дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX} \left\{ (X^4 - 34X^3 + X^2) \frac{d^3 y}{dX^3} + (6X^3 - 103X^2 + 3X) \frac{d^2 y}{dX^2} \right. \\ \left. + (7X^2 - 112X + 1) \frac{dy}{dX} + (X - 5)y - (u_1 - 5u_0) \right\} = 0 \end{aligned}$$

имеет два решения, являющиеся G -функциями, а именно

$$a(X) = 6X + a_2 X^2 + \dots, \quad b(X) = 1 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots,$$

и функция

$$a(X) - \zeta(3)b(X)$$

регулярна, в действительности обращается в нуль, при

$$\alpha^{-1} = (1 - \sqrt{2})^4.$$

¹⁸Эти рекуррентные соотношения давно известны; см. Comtet, *op. cit.*, p. 90. Можно распознать

$$b_n = {}_4F_3(-n, -n, n+1, n+1; 1, 1, 1)$$

и получить рекуррентное соотношение (3) при помощи трёхчленных соотношений для смежных сбалансированных рядов; см. J. A. Wilson, *Hypergeometric series, recurrence relations and some new orthogonal functions*, Ph.D. thesis, University of Wisconsin-Madison, 1978.

¹⁹Все детали можно посмотреть в переводе этой четырёхстраничной статьи на русский по ссылке <https://www.math.ru.nl/~wzudilin/zw/Beukers79.pdf> (Прим. пер.)

Это интересно, но уже не невероятно; и это легко обобщается. Всё это тоже идея Бёйкерса.

Сохраняя причудливый настрой описанных здесь событий, журнал *La Recherche* No. 97, французский аналог журнала *Scientific American*, опубликовал заметку Мишеля Мендес-Франса *Roger Apéry et l'irrationnel*; эта заметка содержит живое описание лекции в Марселе (здесь опущенное из чувства приличия), хотя сам Мендес-Франс во время доклада находился в США.

Некоторые назойливые читатели критиковали моё небрежное употребление символа O ; вина моя, а не Апери. Никакого вреда от этого нет. Точно так же утверждали, что доказательство Апери не было упущено Эйлером: «Эйлер ведь не знал теоремы о простых числах». Мне кажется лицемерным предполагать, что оценка

$$[1, \dots, n] = O\left((1 + \sqrt{2})^{4n/3}\right)$$

не могла быть замечена в то время, если бы она понадобилась. Во всяком случае, я счёл заглавие бойким. Оно возникло после сообщения Козна в Хельсинки, когда кто-то угрюмо заметил: «Победа французского крестьянина...». На это Ник Кац ответил: «Нет...! Нет! Это великолепно! Это то, что мог бы сделать Эйлер...».

Март 1979

School of Mathematics and Physics
Macquarie University
North Ryde, New South Wales
Australia 2113

Примечания переводчика

1 Ускорение сходимости и биномиальные коэффициенты

Здесь, на классическом примере, мы объясняем, почему биномиальные коэффициенты естественно появляются при ускорении сходимости. Оператор прямой разности определяется формулой

$$(\Delta f)(k) = f(k+1) - f(k).$$

Оператор Δ связан с уже упоминавшимися числами Бернулли, когда мы получаем формулы для суммы k -х степеней первых N натуральных чисел; см. [8, 9]. Его r -я итерация имеет вид

$$\Delta^r f(k) = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f(k+j). \quad (1)$$

Предложение 1. Если $f(k)$ есть многочлен по k степени меньше r , то

$$\Delta^r f(k) = 0.$$

Иными словами,

$$\sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} j^m = 0 \quad (0 \leq m < r).$$

Кроме того,

$$\sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} j^r = (-1)^r r!.$$

Доказательство. Оператор Δ понижает степень многочлена на единицу; постоянный многочлен он, разумеется, обращает в нуль. Поэтому $\Delta^r f = 0$, если $\deg f < r$.

Подставляя $k = 0$ в (1), получаем первые биномиальные тождества. Наконец, для $f(k) = k^r$ имеем

$$\Delta^r f = r!.$$

Следовательно, (1) даёт

$$\sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} j^r = r!,$$

и остаётся умножить обе части на $(-1)^r$. □

Перед нами простейший пример погашения ошибки. Если главный член ошибки хорошо приближается многочленом небольшой степени, то знакопеременная биномиальная комбинация достаточно высокого порядка уничтожает этот многочлен. В сущности, вся идея уже содержится в этой простой операции.

Упражнение 1. Вычислите явно

$$\Delta k^2, \quad \Delta^2 k^2, \quad \Delta^3 k^2,$$

а затем непосредственно проверьте тождество

$$\sum_{j=0}^3 (-1)^j \binom{3}{j} j^2 = 0.$$

2 Эйлерово ускорение знакопеременных рядов

Преобразование Эйлера является классическим прообразом биномиального ускорения. Пусть

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

При обычных условиях сходимости преобразование Эйлера даёт

$$S = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \Delta^r a_0}{2^{r+1}}. \quad (2)$$

Здесь

$$\Delta^r a_0 = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} a_j.$$

Таким образом, исходный знакопеременный ряд переписывается через конечные разности высоких порядков медленно меняющейся последовательности a_n .

Пример 1 (Эйлерово ускорение ряда для $\log 2$). Знакопеременный гармонический ряд имеет вид

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Положим

$$a_n = \frac{1}{n+1}.$$

Индукцией, или непосредственно разложением на простейшие дроби, легко проверить, что

$$\Delta^r a_0 = \frac{(-1)^r}{r+1}.$$

Поэтому из (2) следует

$$\log 2 = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r+1)2^{r+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m2^m}.$$

Остаток исходного ряда имеет порядок $1/N$, тогда как остаток преобразованного ряда имеет уже геометрически малый порядок

$$\frac{2^{-N}}{N}.$$

Предложение 2 (Производящая функция биномиального преобразования). Пусть

$$g_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k, \quad F(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n, \quad G(z) = \sum_{n \geq 0} g_n z^n.$$

Тогда

$$G(z) = \frac{1}{1-z} F\left(\frac{z}{1-z}\right). \quad (3)$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k z^n \\ &= \sum_{k \geq 0} f_k \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} z^n. \end{aligned}$$

Но

$$\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} z^n = \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{1-z} \sum_{k \geq 0} f_k \left(\frac{z}{1-z} \right)^k \\ &= \frac{1}{1-z} F\left(\frac{z}{1-z} \right), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Ряд $F(z) = \log(1+z)$ сходится медленно при $z = 1$: его радиус сходимости около $z = 0$ равен единице, и точка $z = 1$ лежит на границе круга сходимости. Из предложения следует

$$G(z) = -\frac{\log(1-z)}{1-z}, \quad G\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \log 2.$$

Следовательно,

$$F(1) = \frac{1}{2} G\left(\frac{1}{2}\right) = \log 2.$$

Ряд для $G(z)$ быстро сходится при $z = 1/2$, поскольку эта точка лежит внутри круга сходимости. Отдельно заметим, что

$$\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m 2^m} = -\log\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \log 2$$

— это ряд Тейлора для $-\log(1-z)$ при $z = 1/2$.

Для первоначального знакомства с алгебраической техникой преобразования Эйлера (только конечные разности, без интегралов) подойдёт [10] — элементарный вывод формулы $\sum (-1)^n a_n = \sum (-1)^k \Delta^k a_0 / 2^{k+1}$.

Исчерпывающее изложение метода Эйлера, включая общий метод (E, q) , интегральные представления и связь с аналитическим продолжением, содержится в [11]. Там преобразование Эйлера выводится как интегральное преобразование, показана его эквивалентность методу Бореля и установлена область суммируемости в терминах аналитических функций (например, суммирование расходящегося ряда $\sum (-1)^n n!$ к интегралу $\int_0^\infty e^{-t}/(1+t) dt$).

3 Созидательное телескопирование

Пусть $F(n, k)$ — слагаемое, зависящее от дискретного параметра n и переменной суммирования k , и пусть

$$S_n = \sum_k F(n, k).$$

Метод созидательного телескопирования состоит в поиске многочленов или рациональных функций

$$p_0(n), \dots, p_r(n),$$

не равных нулю одновременно, и *сертификата* $G(n, k)$, для которых

$$\sum_{j=0}^r p_j(n) F(n+j, k) = G(n, k+1) - G(n, k). \quad (4)$$

Правая часть есть конечная разность по k . Будем также писать

$$\Delta G(n, k) := G(n, k+1) - G(n, k).$$

После суммирования (4) по k правая часть телескопируется:

$$\sum_k (G(n, k+1) - G(n, k)) = \text{граничные члены}.$$

Если сертификат исчезает на концах диапазона суммирования, то

$$\sum_{j=0}^r p_j(n) S_{n+j} = 0.$$

Если же граничные члены не равны нулю, получается соответствующее неоднородное рекуррентное соотношение.

В дальнейшем биномиальные слагаемые продолжают нулём за пределы их естественного диапазона. В частности,

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{при } k < 0 \text{ или } k > n.$$

Аналогичное соглашение используется и для других слагаемых (равны нулю вне своей естественной области определения). Поэтому можно суммировать по всем $k \in \mathbb{Z}$, хотя фактически ненулевых слагаемых остаётся лишь конечное число.

Слагаемое $F(n, k)$ называется гипергеометрическим, если отношения

$$\frac{F(n+1, k)}{F(n, k)} \quad \text{и} \quad \frac{F(n, k+1)}{F(n, k)}$$

являются рациональными функциями от n и k , по крайней мере во внутренней части естественного диапазона.

Сертификат обычно ищут в форме

$$G(n, k) = R(n, k) F(n, k),$$

где $R(n, k)$ — рациональная функция. После деления телескопического тождества на $F(n, k)$ задача сводится к разностному уравнению первого порядка для R .

Для собственно гипергеометрических слагаемых²⁰ при стандартных условиях конечности диапазона теорема Цайльбергера гарантирует существование такого телескопического соотношения. Алгоритм реализован в компьютерной системе *Maxima* (<https://maxima.sourceforge.io>); примеры её использования уже приводились в комментариях. Ниже с помощью созидательного телескопирования мы просуммируем несколько выражений. Их легко найти и без этого метода, но на них удобно продемонстрировать сам подход при относительно небольшом количестве вычислений.

Сумма биномиальных коэффициентов

Положим

$$F(n, k) = \binom{n}{k}, \quad S_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n}{k}.$$

Первые значения равны

$$S_0 = 1, \quad S_1 = 2, \quad S_2 = 4, \quad S_3 = 8.$$

Они подсказывают рекуррентное соотношение

$$S_{n+1} = 2S_n.$$

На уровне слагаемых будем поэтому искать тождество

$$2F(n, k) - F(n+1, k) = G(n, k+1) - G(n, k). \quad (5)$$

Сведение к рациональному разностному уравнению. Имеем

$$\frac{F(n, k+1)}{F(n, k)} = \frac{n-k}{k+1},$$

а также

$$\frac{F(n+1, k)}{F(n, k)} = \frac{n+1}{n+1-k}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{2F(n, k) - F(n+1, k)}{F(n, k)} &= 2 - \frac{n+1}{n+1-k} \\ &= \frac{n+1-2k}{n+1-k}. \end{aligned} \quad (6)$$

Будем искать сертификат в виде

$$G(n, k) = R(n, k)F(n, k).$$

²⁰См. обзор “Арифметические гипергеометрические ряды” В. В. Зудилина в Успехи математических наук, 2011, том 66, выпуск 2(398), страницы 163–216, <https://doi.org/10.4213/rm9420> (Прим. пер.)

Тогда

$$\begin{aligned} G(n, k+1) - G(n, k) &= R(n, k+1)F(n, k+1) - R(n, k)F(n, k) \\ &= F(n, k) \left(\frac{n-k}{k+1} R(n, k+1) - R(n, k) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, R должно удовлетворять уравнению

$$\frac{n-k}{k+1} R(n, k+1) - R(n, k) = \frac{n+1-2k}{n+1-k}. \quad (7)$$

Как угадать сертификат. Знаменатель $n+1-k$ в правой части подсказывает, что тот же множитель должен появиться в знаменателе R . Кроме того, естественно включить в числитель множитель k , поскольку тогда автоматически выполняется $G(n, 0) = 0$. Попробуем

$$R(n, k) = c \frac{k}{n+1-k},$$

где c не зависит от k . Тогда

$$R(n, k+1) = c \frac{k+1}{n-k},$$

и потому

$$\begin{aligned} \frac{n-k}{k+1} R(n, k+1) - R(n, k) &= c - c \frac{k}{n+1-k} \\ &= c \frac{n+1-2k}{n+1-k}. \end{aligned}$$

Сравнение с (7) даёт $c = 1$. Следовательно,

$$R(n, k) = \frac{k}{n+1-k},$$

и

$$G(n, k) = \frac{k}{n+1-k} \binom{n}{k}.$$

Полезно устранить кажущуюся особенность при $k = n+1$. Поскольку

$$\binom{n}{k} = \frac{n+1-k}{n+1} \binom{n+1}{k},$$

получаем эквивалентную регулярную форму

$$\boxed{G(n, k) = \frac{k}{n+1} \binom{n+1}{k}}. \quad (8)$$

Непосредственная проверка. Используя тождество

$$(k+1) \binom{n+1}{k+1} = (n+1-k) \binom{n+1}{k},$$

получаем

$$\begin{aligned} G(n, k+1) - G(n, k) &= \frac{k+1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} - \frac{k}{n+1} \binom{n+1}{k} \\ &= \frac{n+1-k-k}{n+1} \binom{n+1}{k} \\ &= \frac{n+1-2k}{n+1} \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} 2 \binom{n}{k} - \binom{n+1}{k} &= \left(\frac{2(n+1-k)}{n+1} - 1 \right) \binom{n+1}{k} \\ &= \frac{n+1-2k}{n+1} \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

Тем самым (5) доказано.

Суммируя по $k = 0, \dots, n+1$, находим

$$\begin{aligned} 2S_n - S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} (G(n, k+1) - G(n, k)) \\ &= G(n, n+2) - G(n, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S_{n+1} = 2S_n.$$

Так как $S_0 = 1$, получаем

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.}$$

То же вычисление с параметром. Положим теперь

$$F(n, k) = \binom{n}{k} x^k, \quad S_n(x) = \sum_k \binom{n}{k} x^k.$$

Проверьте, что сертификатом для тождества

$$(1+x)F(n, k) - F(n+1, k) = G(n, k+1) - G(n, k)$$

служит

$$\boxed{G(n, k) = \frac{k}{n+1} \binom{n+1}{k} x^k.} \tag{9}$$

Чему равно S_n , вычисленное методом созидательного телескопирования?

Сумма, связанная с числами Фибоначчи

Положим

$$F(n, k) = \binom{n-k}{k}, \quad S_n = \sum_{k \geq 0} \binom{n-k}{k}.$$

Естественный диапазон суммирования имеет вид

$$0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

За пределами этого диапазона полагаем $F(n, k) = 0$.

Первые значения равны

$$S_0 = 1, \quad S_1 = 1, \quad S_2 = 2, \quad S_3 = 3, \quad S_4 = 5.$$

Они подсказывают рекуррентное соотношение

$$S_n - S_{n-1} - S_{n-2} = 0, \quad n \geq 2.$$

В данном случае сертификат проще всего найти непосредственно из формулы Паскаля:

$$\begin{aligned} F(n, k) &= \binom{n-k}{k} \\ &= \binom{n-k-1}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \\ &= F(n-1, k) + F(n-2, k-1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$F(n, k) - F(n-1, k) - F(n-2, k) = F(n-2, k-1) - F(n-2, k). \quad (10)$$

Определим

$$\boxed{G(n, k) = -F(n-2, k-1) = -\binom{n-k-1}{k-1}.} \quad (11)$$

Тогда

$$\begin{aligned} G(n, k+1) - G(n, k) &= -F(n-2, k) + F(n-2, k-1) \\ &= F(n, k) - F(n-1, k) - F(n-2, k), \end{aligned}$$

что и есть (10).

Суммирование по всем $k \in \mathbb{Z}$ даёт

$$S_n - S_{n-1} - S_{n-2} = 0, \quad n \geq 2.$$

Так как $S_0 = S_1 = 1$, заключаем, что

$$\boxed{S_n = F_{n+1},}$$

где

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{m+1} = F_m + F_{m-1} \quad (m \geq 1).$$

Сертификат как рациональный множитель слагаемого. Во внутренней части естественного диапазона

$$\frac{\binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-k}{k}} = \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} \frac{k!(n-2k)!}{(n-k)!} = \frac{k}{n-k}.$$

Поэтому, там где правая часть определена, сертификат можно также записать в виде

$$G(n, k) = -\frac{k}{n-k} F(n, k). \quad (12)$$

Основной следует считать регулярную биномиальную форму (11); она не создаёт искусственных особенностей на границе.

Этот пример показывает, что сначала полезно поискать локальное комбинаторное тождество. Общий рациональный анзац не нужен, если телескопическая разность обнаруживается одним применением формулы Паскаля.

Тождество для центрального биномиального коэффициента

Положим

$$F(n, k) = \binom{n}{k}^2, \quad S_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n}{k}^2.$$

Выведем, не предполагая заранее, тождество

$$S_n = \binom{2n}{n}.$$

Угадывание рекуррентного соотношения по первым значениям. Первые значения равны

$$S_0 = 1, \quad S_1 = 2, \quad S_2 = 6, \quad S_3 = 20, \quad S_4 = 70, \quad S_5 = 252.$$

Отношения соседних членов имеют вид

$$\frac{S_1}{S_0} = 2, \quad \frac{S_2}{S_1} = 3, \quad \frac{S_3}{S_2} = \frac{10}{3}, \quad \frac{S_4}{S_3} = \frac{7}{2}, \quad \frac{S_5}{S_4} = \frac{18}{5}.$$

Предположим, что это отношение является рациональной функцией степени 1/1:

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{an + b}{cn + d}.$$

Поскольку при $n = 0$ отношение конечно, $d \neq 0$; нормируем $d = 1$. Первые три отношения дают

$$b = 2,$$

$$\frac{a+2}{c+1} = 3,$$

и

$$\frac{2a+2}{2c+1} = \frac{10}{3}.$$

Из второго уравнения следует

$$a = 3c + 1.$$

Третье уравнение эквивалентно

$$3(2a + 2) = 10(2c + 1),$$

то есть

$$3a - 10c = 2.$$

Подставляя $a = 3c + 1$, получаем

$$3(3c + 1) - 10c = 2,$$

откуда

$$c = 1, \quad a = 4.$$

Итак, предполагаемая формула имеет вид

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{4n + 2}{n + 1} = \frac{2(2n + 1)}{n + 1}.$$

Эквивалентно, мы предполагаем, что

$$(n + 1)S_{n+1} - 2(2n + 1)S_n = 0. \quad (13)$$

Численное угадывание ещё не является доказательством. Теперь построим сертификат, доказывающий (13).

Выражение на уровне слагаемых. Определим

$$T(n, k) = (n + 1)F(n + 1, k) - 2(2n + 1)F(n, k).$$

Будем искать функцию $G(n, k)$, удовлетворяющую

$$T(n, k) = G(n, k + 1) - G(n, k). \quad (14)$$

В качестве базового гипергеометрического слагаемого удобно взять

$$B(n, k) := F(n + 1, k) = \binom{n + 1}{k}.$$

Для него

$$\frac{B(n, k + 1)}{B(n, k)} = \frac{(n + 1 - k)^2}{(k + 1)^2}. \quad (15)$$

Кроме того,

$$\frac{F(n, k)}{B(n, k)} = \left(\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k}} \right)^2 = \frac{(n + 1 - k)^2}{(n + 1)^2}. \quad (16)$$

Следовательно,

$$\frac{T(n, k)}{B(n, k)} = (n + 1) - 2(2n + 1) \frac{(n + 1 - k)^2}{(n + 1)^2}. \quad (17)$$

Рациональное уравнение для сертификата. Будем искать сертификат в виде

$$G(n, k) = H(n, k)B(n, k).$$

Тогда

$$\begin{aligned} G(n, k+1) - G(n, k) &= H(n, k+1)B(n, k+1) - H(n, k)B(n, k) \\ &= B(n, k) \left(\frac{(n+1-k)^2}{(k+1)^2} H(n, k+1) - H(n, k) \right). \end{aligned}$$

Сравнивая с (17), получаем уравнение

$$\frac{(n+1-k)^2}{(k+1)^2} H(n, k+1) - H(n, k) = (n+1) - 2(2n+1) \frac{(n+1-k)^2}{(n+1)^2}. \quad (18)$$

Угадывание знаменателя и степени числителя. Правая часть (18) имеет знаменатель $(n+1)^2$. Поэтому попробуем

$$H(n, k) = \frac{h(n, k)}{(n+1)^2},$$

где $h(n, k)$ — многочлен по k . После умножения (18) на $(n+1)^2(k+1)^2$ получаем

$$\begin{aligned} (n+1-k)^2 h(n, k+1) - (k+1)^2 h(n, k) \\ = (k+1)^2 [(n+1)^3 - 2(2n+1)(n+1-k)^2]. \end{aligned} \quad (19)$$

Правая часть имеет степень 4 по k . Если h имеет степень d , то оба слагаемых слева первоначально имеют степень $d+2$, но их старшие члены сокращаются. В общем случае остаётся степень $d+1$. Поэтому равенство $d+1=4$ подсказывает кубический анзац

$$h(n, k) = \alpha k^3 + \beta k^2 + \gamma k + \delta, \quad (20)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ могут зависеть от n .

Сравнение коэффициентов. Подставим (20) в (19), перенесём правую часть влево, раскроем скобки и сравним коэффициенты при степенях k .

Коэффициент при k^4 равен

$$(2n+1)(2-\alpha).$$

Следовательно,

$$\alpha = 2.$$

После подстановки $\alpha = 2$ коэффициент при k^3 равен

$$-2(n+1)(\beta + 3n + 3),$$

откуда

$$\beta = -3(n+1).$$

После подстановки найденных значений коэффициент при k^2 становится равным

$$-(2n+3)\gamma.$$

Поэтому

$$\gamma = 0.$$

Коэффициент при k после этого равен

$$-2(n+2)\delta,$$

и потому

$$\delta = 0.$$

При этих значениях постоянный коэффициент также тождественно обращается в нуль.

Таким образом,

$$h(n, k) = 2k^3 - 3(n+1)k^2 = k^2(2k - 3n - 3).$$

Следовательно,

$$H(n, k) = \frac{k^2(2k - 3n - 3)}{(n+1)^2},$$

и сертификат имеет вид

$$\boxed{G(n, k) = \frac{k^2(2k - 3n - 3)}{(n+1)^2} \binom{n+1}{k}^2.} \quad (21)$$

Непосредственная проверка сертификата. Используя (15), получаем

$$\begin{aligned} \frac{G(n, k+1) - G(n, k)}{B(n, k)} &= \frac{(n+1-k)^2 (k+1)^2 (2k - 3n - 1)}{(k+1)^2 (n+1)^2} \\ &\quad - \frac{k^2(2k - 3n - 3)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{(2k - 3n - 1)(n+1-k)^2 - k^2(2k - 3n - 3)}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

В числителе выполняется полиномиальное тождество

$$\begin{aligned} &(2k - 3n - 1)(n+1-k)^2 - k^2(2k - 3n - 3) \\ &= (n+1)^3 - 2(2n+1)(n+1-k)^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{G(n, k+1) - G(n, k)}{B(n, k)} &= (n+1) - 2(2n+1) \frac{(n+1-k)^2}{(n+1)^2} \\ &= \frac{T(n, k)}{B(n, k)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$G(n, k+1) - G(n, k) = T(n, k),$$

что доказывает (14).

Просуммируем теперь по $k = 0, \dots, n+1$. Поскольку

$$G(n, 0) = 0$$

из-за множителя k^2 , а

$$G(n, n+2) = 0$$

из-за равенства

$$\binom{n+1}{n+2} = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} & (n+1)S_{n+1} - 2(2n+1)S_n \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (G(n, k+1) - G(n, k)) \\ &= G(n, n+2) - G(n, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{2(2n+1)}{n+1}.$$

Поскольку $S_0 = 1$,

$$\begin{aligned} S_n &= \prod_{j=0}^{n-1} \frac{2(2j+1)}{j+1} \\ &= \frac{2^n (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))}{n!}. \end{aligned}$$

Но

$$(2n)! = (2 \cdot 4 \cdots 2n)(1 \cdot 3 \cdots (2n-1)) = 2^n n! (1 \cdot 3 \cdots (2n-1)).$$

Поэтому

$$S_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

то есть

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}.$$

Практическая процедура ручного вычисления

Предыдущие примеры подсказывают следующую последовательность действий.

Шаг 1. Вычислить первые значения. Вычислите несколько точных значений

$$S_n = \sum_k F(n, k).$$

Важно использовать точную арифметику: десятичные приближения могут скрыть рациональную структуру рекуррентного соотношения.

Шаг 2. Угадать рекуррентное соотношение малого порядка. Сначала следует проверить, является ли отношение соседних членов рациональной функцией:

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{P(n)}{Q(n)},$$

где P и Q имеют небольшие степени.

Если это не удаётся, ищут рекуррентное соотношение малого порядка

$$\sum_{j=0}^r p_j(n) S_{n+j} = 0,$$

где $p_j(n)$ — многочлены ограниченной степени. Подстановка достаточного числа начальных значений приводит к линейной системе для их коэффициентов.

Шаг 3. Перенести рекуррентное соотношение на слагаемое. Составьте выражение

$$T(n, k) = \sum_{j=0}^r p_j(n) F(n+j, k).$$

Теперь требуется доказать, что

$$T(n, k) = G(n, k+1) - G(n, k).$$

Шаг 4. Выбрать базовое гипергеометрическое слагаемое. Выберите одно из сдвинутых слагаемых $B(n, k)$ и представьте каждый член $T(n, k)$ как рациональный множитель при $B(n, k)$:

$$T(n, k) = A(n, k) B(n, k).$$

Следует выбирать B так, чтобы отношения

$$\frac{F(n+j, k)}{B(n, k)}$$

были как можно проще.

Шаг 5. Получить уравнение для сертификата. Будем искать

$$G(n, k) = H(n, k) B(n, k).$$

Тогда

$$\frac{B(n, k+1)}{B(n, k)} H(n, k+1) - H(n, k) = A(n, k).$$

Это и есть рациональное разностное уравнение, которое необходимо решить.

Шаг 6. Угадать общую формулу H . Знаменатель H обычно подсказывают:

- знаменатель функции $A(n, k)$;
- отношение $B(n, k + 1)/B(n, k)$;
- множители, необходимые для устранения кажущихся полюсов.

В числитель часто полезно включать граничные множители, например

$$k, \quad k^2, \quad n + 1 - k.$$

Так, множитель k автоматически обеспечивает равенство

$$G(n, 0) = 0.$$

Шаг 7. Ввести полиномиальный анзац для числителя. После выбора знаменателя запишите

$$H(n, k) = \frac{h(n, k)}{D(n, k)}$$

и положите

$$h(n, k) = a_0(n) + a_1(n)k + \cdots + a_d(n)k^d.$$

После приведения к общему знаменателю и сравнения коэффициентов при степенях k получается линейная система для неизвестных функций $a_j(n)$.

Шаг 8. Проверить граничные члены. Даже после нахождения тождества

$$T(n, k) = G(n, k + 1) - G(n, k)$$

необходимо отдельно вычислить вклад концов диапазона. Для конечной суммы по $k = a, \dots, b$

$$\sum_{k=a}^b (G(n, k + 1) - G(n, k)) = G(n, b + 1) - G(n, a).$$

Рекуррентное соотношение для S_n получается лишь после вычисления этих граничных членов.

4 Тождество Эйлера

Пусть n — неотрицательное целое число, а x и a_k таковы, что все знаменатели в (23) отличны от нуля. Тогда, как мы уже доказали,

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_1 a_2 \cdots a_k}{(x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_{k+1})} = \frac{1}{x} - \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}{x(x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_{n+1})}. \quad (23)$$

Тождество (23) является записью 25 в четвёртой части *Тетрадей Рамануджана*, подготовленной Бёрндтом [1, р. 36]; там оно доказано методом математической индукции. Также оно появляется как задача 270 из § 32 третьего тома сборника Гюнтера и Кузьмина [2, § 32, задача 270].

Упражнение 2. Пусть $x, a_1, a_2, \dots$ — положительные числа. Докажите, что сумма ряда

$$\frac{a_1}{a_2 + x} + \frac{a_1 a_2}{(a_2 + x)(a_3 + x)} + \frac{a_1 a_2 a_3}{(a_2 + x)(a_3 + x)(a_4 + x)} + \dots$$

равна $\frac{a_1}{x}$, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ расходится; в случае его сходимости сумма равна

$$\frac{a_1}{x} \left(1 - \prod_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{a_n + x} \right).$$

Формула (23) является вариацией элементарного тождества Эйлера

$$1 - \prod_{n=1}^N (1 - q^n) = \sum_{m=1}^N q^m \prod_{n=1}^{m-1} (1 - q^n) = q + q^2(1 - q) + q^3(1 - q)(1 - q^2) + \dots, \quad (24)$$

которое Эйлер использовал в одном из доказательств теоремы о пятиугольных числах [3]. В действительности (24) есть лишь замаскированное телескопирование. Если положить $x_m = 1 - q^m$, то оно принимает вид

$$\prod_{\nu=1}^N x_{\nu} - 1 = \sum_{m=1}^N (x_m - 1) \prod_{n=1}^{m-1} x_n. \quad (25)$$

Действительно, m -е слагаемое справа равно

$$\prod_{n=1}^m x_n - \prod_{n=1}^{m-1} x_n.$$

Для приложений удобно положить

$$x_m = \frac{u_m}{v_m}, \quad w_m = u_m - v_m.$$

Тогда (25) превращается в

$$\sum_{m=1}^N w_m \frac{u_1 u_2 \dots u_{m-1}}{v_1 v_2 \dots v_m} = \frac{u_1 u_2 \dots u_N}{v_1 v_2 \dots v_N} - 1. \quad (26)$$

Пустое произведение при $m = 1$, как обычно, считается равным 1. Именно эту форму Бхатнагар называет леммой Эйлера о телескопировании [5, §§2–3].

Формула из предыдущего упражнения получается подстановкой

$$x_n = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + x}.$$

После умножения на a_1/x имеем

$$\sum_{m=1}^N \prod_{n=1}^m \frac{a_n}{a_{n+1} + x} = \frac{a_1}{x} \left(1 - \prod_{n=2}^{N+1} \frac{a_n}{a_n + x} \right).$$

Связь с созидательным телескопированием теперь почти очевидна. Положив

$$G(n, m) = C(n) \frac{u_1 u_2 \dots u_m}{v_1 v_2 \dots v_m},$$

получаем

$$G(n, m) - G(n, m - 1) = C(n)w_m \frac{u_1 u_2 \cdots u_{m-1}}{v_1 v_2 \cdots v_m}.$$

Следовательно, если после нормировки некоторого конечного гипергеометрического тождества разность

$$F(n + 1, m) - F(n, m)$$

удётся представить в стоящей справа форме, то последовательности u_m и v_m немедленно дают телескопический сертификат $G(n, m)$. Суммирование по m , вместе с исчезновением граничных членов, показывает, что

$$\sum_m F(n, m)$$

не зависит от n . Остаётся лишь вычислить эту сумму при одном начальном значении n .

Это, в сущности, простейший вариант метода Уилфа–Цайльбергера, записанный в мультипликативной форме. Бхатнагар применяет эту схему к биномиальной формуле, тождеству Чу–Вандермонда и другим классическим гипергеометрическим суммам [5, §§5–6]. Ниже мы разберём первые два примера непосредственно, извлекая последовательности u_m и v_m из разности $F(n + 1, m) - F(n, m)$.

Пример 2 (Тождество Чу–Вандермонда). Пусть n — неотрицательное целое число, а параметры a и b таковы, что встречающиеся ниже знаменатели отличны от нуля. Тогда

$$\sum_{k=0}^n \frac{(a)_k (-n)_k}{(b)_k k!} = \frac{(b-a)_n}{(b)_n}, \quad (27)$$

где

$$(a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1), \quad (a)_0 = 1,$$

обозначает символ Похгаммера.

Замечание 1. Историю тождества Чу–Вандермонда см. в [7, Сог. 2.2.3].

Доказательство. Разделив обе части (27) на правую часть, сведём доказательство к тождеству

$$\sum_{k=0}^n F(n, k) = 1,$$

где

$$F(n, k) = \frac{(b)_n}{(b-a)_n} \frac{(a)_k (-n)_k}{(b)_k k!}.$$

Вычисляя разность по параметру n , получаем

$$\begin{aligned} F(n+1, k) - F(n, k) &= \frac{a(b)_n}{(b-a)_{n+1}} \\ &\times \left(\frac{a(n-k+1) + k(b+n)}{a(n+1)} \frac{(a)_k (-n-1)_k}{(b)_k k!} \right). \end{aligned}$$

Снова сопоставим выражение в скобках со слагаемым из леммы Эйлера. Положим

$$u_k = (a+k)(-n-1+k), \quad v_k = k(b+k-1).$$

Тогда

$$\begin{aligned}w_k &= u_k - v_k = -(a(n - k + 1) + k(b + n)), \\w_0 &= -a(n + 1).\end{aligned}$$

Кроме того,

$$u_{n+1} = 0, \quad v_0 = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} (F(n+1, k) - F(n, k)) &= \frac{a(b)_n}{(b-a)_{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{w_k}{w_0} \frac{u_0 u_1 \cdots u_{k-1}}{v_1 v_2 \cdots v_k} \\&= 0.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^n F(n, k)$$

не зависит от n . При $n = 0$ эта сумма равна 1, что и доказывает (27). $\square$

В обоих доказательствах разность $F(n+1, k) - F(n, k)$ не ищется непосредственно в виде $G(n, k+1) - G(n, k)$. Вместо этого её множители подбираются так, чтобы применить мультипликативную лемму Эйлера. Тем самым телескопический сертификат возникает автоматически из последовательностей u_k и v_k .

Литература

- [1] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, Part IV*, Springer-Verlag, New York, 1994.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0879-2>
- [2] Н. М. Гюнтер, Р. О. Кузьмин, *Сборник задач по высшей математике*. Т. III, 4-е изд., испр., М.—Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951.
- [3] L. Euler, *Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum*, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* **5** (1760), 75–83; Eneström Index E244; reprinted in *Opera Omnia*, Series I, Vol. 2, pp. 390–398.
- [4] O. X. Schlömilch, *Compendium der höheren Analysis*, Zweiter Band, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1866, S. 26–31.
- [5] G. Bhatnagar, *In praise of an elementary identity of Euler*, *Electronic Journal of Combinatorics* **18**(2) (2011), Paper P13.
- [6] J. Bell, *A summary of Euler's work on the pentagonal number theorem*, *Archive for History of Exact Sciences* **64** (2010), no. 3, 301–373.
- [7] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy, *Special Functions*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Vol. 71, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [8] В. С. Абрамович, Числа Бернулли, *Квант*, 1974, № 6, с. 10–14.
- [9] А. Веселов, Числа Бернулли, многочлены Эйлера и формулы сложения, *Квант*, 2023, № 11-12, с. 10–19.
- [10] Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. — М.: Физматгиз, 1966. — Глава VI, § 2 «Улучшение сходимости степенных рядов методом Эйлера-Абеля».
- [11] Харди Г. Расходящиеся ряды. — М.: Издательство иностранной литературы, 1951. — Главы VIII, IX «Методы Эйлера и Бореля».